

Chapitre 04 Triangles (livre p.168)

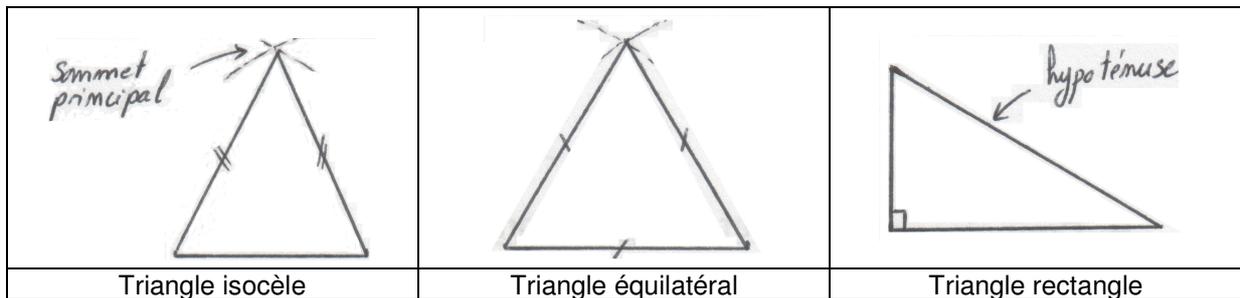
Je vais apprendre à: (socle 7)

- Construire un triangle
- Utiliser l'inégalité triangulaire
- Utiliser les hauteurs, médianes, médiatrices d'un triangle, construire son cercle circonscrit et calculer son aire.

I. Rappel : angles dans un triangle

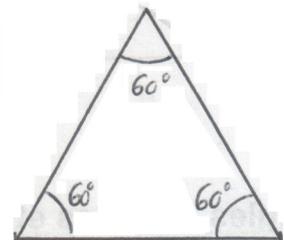
Quand on a : les mesures de 2 angles d'un triangle
Et qu'on veut : la mesure du 3° angle

Pté 1 (admise) : La somme des mesures des trois angles d'un triangle est 180°.



Quand on a : un triangle équilatéral
Et qu'on veut : la mesure de ses angles

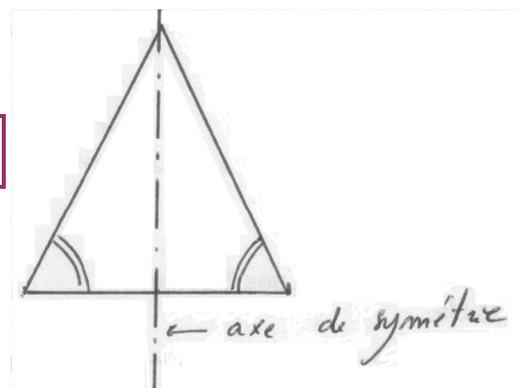
Pté 2 (démontrée): Les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux, et mesurent 60°.



Quand on a : un triangle isocèle
Et qu'on veut : calculer ses angles

Pté 3 (démontrée): Les deux angles d'un triangle isocèle qui ne correspondent pas à son sommet principal sont égaux.

Explication : le triangle possède un axe de symétrie, la hauteur issue de son sommet principal ; la symétrie conserve les angles.

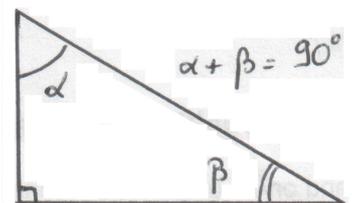


Quand on a : un triangle rectangle
Et qu'on veut : calculer ses angles

Pté 4 (démontrée): Les deux angles d'un triangle rectangle qui ne sont pas l'angle droit sont complémentaires*.

*complémentaires : la somme de leurs mesures est 90°
(Voir le futur chapitre "Angles").

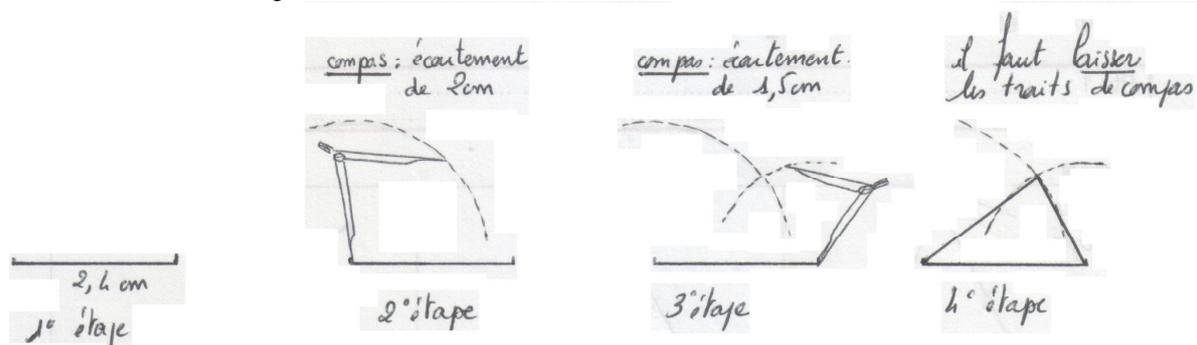
Explication : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$; Si $\hat{C} = 90^\circ$, $\hat{A} + \hat{B} + 90^\circ = 180^\circ$,
donc $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$



II. Construction de triangles.

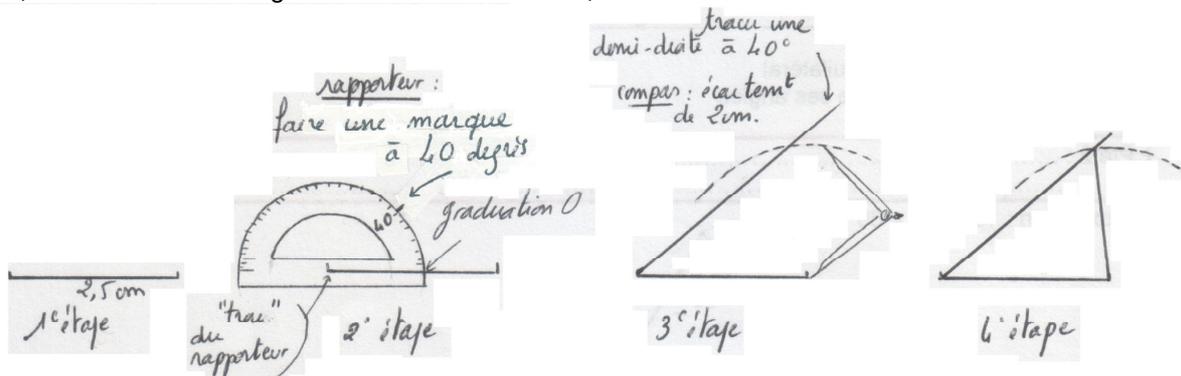
A. Connaissant les 3 côtés (construction au compas)

Ici, on construit un triangle de dimensions: 2,4cm / 2cm / 1,5cm



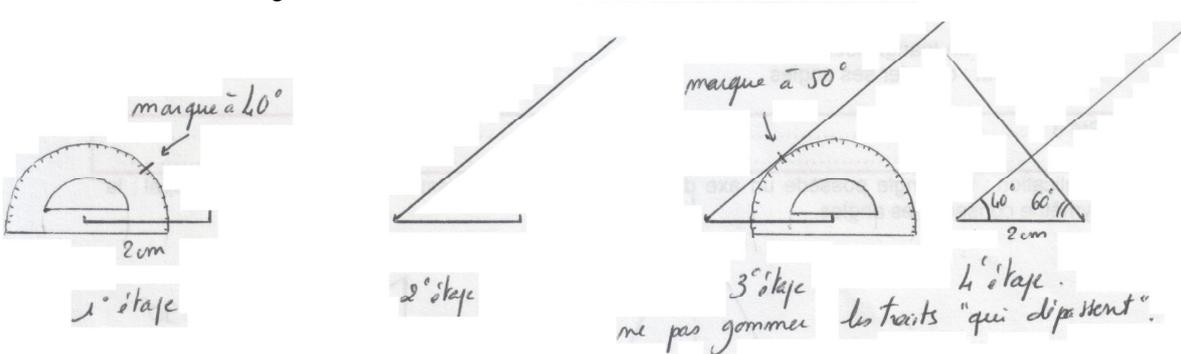
B. Connaissant 2 côtés et 1 angle (compas et rapporteur)

Ici, on construit un triangle de dimensions: 40° / 2,5cm / 2cm



C. Connaissant 1 côté et 2 angles (compas et rapporteur)

Ici, on construit un triangle de dimensions: 2cm / 40° / 50°



III. Inégalité triangulaire

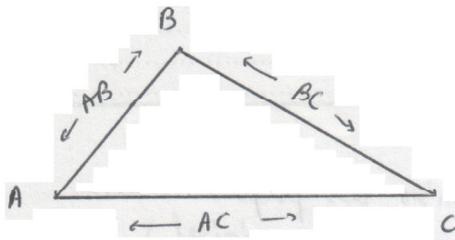
Quand on a : un triangle à construire connaissant ses 3 côtés
Et qu'on veut : savoir si c'est possible.

Pté 5 « inégalité triangulaire » (admise): Dans un triangle, la longueur d'un côté est toujours inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. $AC \leq AB + BC$.

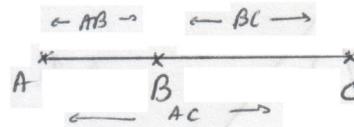
Si cette règle n'est pas respectée, le triangle n'est pas constructible (figure impossible)

Remarque : cette règle signifie tout simplement que « le plus court chemin entre deux points est la ligne droite », et que si l'on fait un « détour » par un 3^e point, ce sera forcément plus long.

$$AC < AB + BC$$



$$AC = AB + BC$$



Quand on a : trois points
Et qu'on veut : prouver qu'ils sont alignés

Pté 6 « cas d'égalité de l'inégalité triangulaire » (admise) : Si $AC = AB + BC$, alors B appartient à $[AC]$.

Remarque : Cela signifie que si « passer par un 3^o point ne rallonge pas le chemin », c'est que ce 3^o point était « sur notre route » (ce n'était pas un détour).

Réciproque* de la Pté 6:

Quand on a : 3 points alignés
Et qu'on veut : calculer des distances

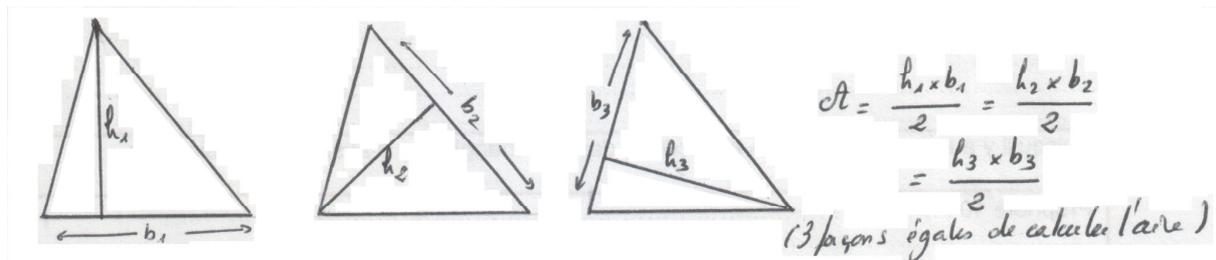
Pté 6' (admise) : Si B appartient à $[AC]$, alors $AC = AB + BC$.

* « Réciproque » : on a inversé le « si » et le « alors ».

IV. Hauteurs, médianes, médiatrices dans un triangle.

A. Hauteurs.

Définition 1 : Une hauteur d'un triangle est une droite qui passse par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.



Propriété 7 (admise): Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.

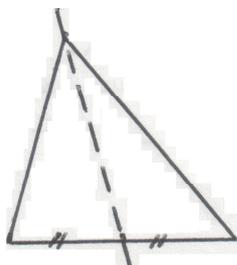
Propriété 8 (démontrée): Calcul de l'aire d'un triangle.

Soit un triangle, on note b la longueur de l'un quelconque de ses trois côtés, que l'on appellera la base. On note h la longueur de la hauteur perpendiculaire à ce côté.

L'aire du triangle est alors : $A = \frac{b \times h}{2}$.

B. Médiane.

Définition 2 : Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.



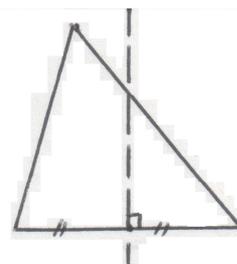
△ la médiane n'est pas perpendiculaire au côté opposé. (en général)

Propriété 9 (admise): Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité ou barycentre du triangle.

C. Médiatrice.

Équidistant signifie « à la même distance ». Par exemple, dire que le point M est équidistant de A et de B signifie que le point M est à la même distance de A que de B .

Définition 3 : La médiatrice d'un segment est la droite qui est perpendiculaire à ce segment en son milieu.



△ la médiatrice ne passe pas par le sommet opposé (en général).

Propriété 10 (admise):

- (a) Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors ce point est équidistant des extrémités de ce segment.
- (b) Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment.

Puisqu'il y a trois segments (les trois côtés) dans un triangle, il y a aussi trois médiatrices.

Propriété 11 (démontrée): Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre du cercle circonscrit au triangle.

Figure: voir exercices.

